# DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

## SERIE M

*Samedi 29 mai 1993 de 8 h à 12 h*

Soit un entier $r \geqslant 2$ et $\mathcal{M}_r$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à coefficients complexes. On considère les sous-ensembles de $\mathcal{M}_r$ suivants :

- $\mathcal{S}_r$ formé par les matrices $A = (a_{ij})$ telles que $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$ $\sum_{j=1}^{r} a_{ij} = 1$,

- $\mathcal{S}_r^+$ formé par les matrices de $\mathcal{S}_r$ à coefficients réels positifs.

On note : $I_r$ la matrice identité d'ordre r,

$J_r$ la matrice de $\mathcal{M}_r$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Si $\sigma$ est une permutation de $\{1,\ldots,r\}$, on note $M_\sigma$ la matrice $(a_{ij})$ de $\mathcal{M}_r$ définie par : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,r\}^2$ $a_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$.
$= 0$ sinon

**Préliminaire**

Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ et $M_{ab} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

1) A quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur a et b) $M_{ab}$ est-elle inversible ? Calculer, quand il existe, l'inverse $M_{ab}^{-1}$ de $M_{ab}$.

2) Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de $M_{ab}$.

3) A quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur a et b) $M_{ab}$ est-elle diagonalisable ?

I. On considère une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_r$.

1) Etablir l'équivalence $A \in \mathcal{S}_r \iff A\,J_r = J_r$ .

2) Montrer que $\mathcal{S}_r$ est stable par multiplication et que si une matrice inversible appartient à $\mathcal{S}_r$ alors son inverse appartient aussi à $\mathcal{S}_r$.

3) Montrer que $\mathcal{S}_r^+$ est stable par multiplication. Si une matrice inversible appartient à $\mathcal{S}_r^+$ son inverse appartient-il toujours à $\mathcal{S}_r^+$ ?

4) Pour toute permutation $\sigma$ de $\{1,\ldots,r\}$ montrer que $M_\sigma$ appartient à $\mathcal{S}_r^+$, que $M_\sigma$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}_r^+$.

5) On suppose que A est inversible et que A et $A^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{S}_r^+$.

a) On pose $A^{-1} = (b_{ij})$.

Montrer que $\forall (i,j,k) \in \{1,\ldots,r\}^3$, $i \neq j$, $b_{ik}a_{kj} = 0$ et en déduire que chaque colonne de A ne contient qu'un seul coefficient non nul.

b) En déduire qu'il existe une permutation $\sigma$ de $\{1,\ldots,r\}$ telle que $A = M_\sigma$.

c) Pour <u>r = 3</u>, déterminer toutes les matrices de $\mathcal{S}_r^+$ dont l'inverse appartient à $\mathcal{S}_r^+$ et calculer les valeurs propres de ces matrices.

6) Déterminer les matrices orthogonales réelles appartenant à $\mathcal{S}_r^+$.

II. 1) Soit A une matrice de $\mathcal{S}_r$. Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer un vecteur propre associé.

2) Soit A une matrice inversible telle que A et $A^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{S}_r^+$.

a) Montrer qu'il existe un entier k non nul tel que $A^k = I_r$.

b) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_r$ et que ses valeurs propres sont de module 1.

3) Soient $x_1,\ldots,x_r$ r complexes <u>non nuls</u>. Démontrer, par récurrence, que :

$$\left|\sum_{j=1}^{r} x_j\right| = \sum_{j=1}^{r} |x_j| \implies \forall j \in \{2,\ldots,r\}\ \exists\, \lambda_j \in ]0,+\infty[\quad x_j = \lambda_j x_1 .$$

4) Soit A une matrice de $\mathcal{S}_r^+$. On considère une valeur propre (complexe) $\lambda$ de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

b) En déduire que : $\det A \in [-1,1]$.

c) En utilisant II.3), montrer que si $|\lambda| = 1$ alors il existe un entier p non nul tel que $\lambda^p = 1$. (On pourra d'abord établir que si $|x_k| = \underset{1\leqslant j\leqslant r}{\text{Max}}\ |x_j|$ alors il existe $k_1$ tel que $x_{k_1} = \lambda x_k$).

5) Soit A une matrice de $\mathcal{S}_r^+$ dont tous les coefficients sont strictement positifs.

a) Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de A de module 1. (On pourra reprendre la démonstration de II.4 c)).

III. Pour $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_r$ on pose $\|A\| = \underset{1\leqslant i\leqslant r}{\text{Max}} \left(\sum_{j=1}^{r} |a_{ij}|\right)$.

1) Vérifier que $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_r$.

2) Etablir : $- \forall (A,B) \in \mathcal{M}_r^2 \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$

$- \forall A \in \mathcal{M}_r \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|A^n\| \leqslant \|A\|^n$

3) Montrer que $\mathcal{S}_r^+$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{M}_r$.

4) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_r$ et $B = I_r - A$. On suppose dans cette question que $\|B\| < 1$.

a) Montrer que la série de terme général $B^n$ est convergente.

b) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n$.

5) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{S}_r^+$. Montrer que si, $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$ $a_{ii} > \frac{1}{2}$, alors A est inversible (on pourra utiliser III.4)). Prouver, par un exemple simple, que cette condition n'est pas nécessaire.

6) Soit A une matrice de $\mathcal{S}_r^+$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. On suppose de plus que A est diagonalisable.

En utilisant le résultat du II.5), montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice M de $\mathcal{S}_r^+$ et comparer les lignes de M.

---